अतः $W, P(x)$ की उपसमष्टि है।

Read

Ex. 8. ***Examine which of the following sets of vectors $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in R^n are subspaces of R^n? ($n \geq 3$)***

जाँच कीजिए कि R'' के निम्न सदिशों $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ के समुच्चयों में से कौन-कौन से R^n की उपसमष्टि हैं?

(a) $\forall \alpha, a_1 \geq 0$ (b) $\forall \alpha, a_1 + 3a_2 = a_3$

(c) $\forall \alpha, a_2 = a_1^2$ (d) $\forall \alpha, a_1 a_2 = 0$

(e) $\forall \alpha, a_2$ परिमेय (*rational*)

Sol. (a) मान लो $W_1 = \{\alpha \mid \alpha \in R'' \text{ तथा } a_i \geq 0\}$

पुनः माना $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W_1$

तथा $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W_1$ तब दिये गये प्रतिबन्ध से, $a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$.

अब $a, b \in R$ के लिये

$$a\alpha + b\beta = a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \ldots, aa_n + bb_n)$$

परन्तु $aa_1 + bb_1$ का अऋणात्मक होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ यदि $a = -2$, $b = -1$ लें तो $a_1 = 4, b_1 = 3$ के लिये

$$aa_1 + bb_1 = (-2)4 + (-1)3 = -11 < 0$$

अतः $a\alpha + b\beta \notin W_1$, परिणामतः W_1 उपसमष्टि नहीं हैं।

(b) मान लो $W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in R^n \text{ तथा } a_1 + 3a_2 = a_3\}$

पुनः माना $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W_2$ तथा $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W_2$

तब दिये गये प्रतिबन्ध से $a_1 + 3a_2 = a_3$ तथा $b_1 + 3b_2 = b_3$ ... (1)

अब $a, b \in R$ के लिये

$$a\alpha + b\beta = a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \ldots, aa_n + bb_n) \in W_2$$
$$[\because (aa_1 + bb_1) + 3(aa_2 + bb_2) = a(a_1 + 3a_2) + b(b_1 + 3b_2)$$
$$= aa_3 + bb_3 \qquad [(1) \text{ से}]]$$

$\therefore \quad a, b \in R$ तथा $\alpha, \beta \in W_2 \Rightarrow a\alpha + g\beta \in W_2$

अतः W_2, R^n की एक उपसमष्टि है।

(c) मान लो $W_3 = \{\alpha \mid \alpha \in R^n$ तथा $a_2 = a_1^2\}$

पुनः माना $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W_3$ तथा $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W_3$

तब दिये गये प्रतिबन्ध से $a_2 = a_1^2$ तथा $b_2 = b_1^2$

अब $a, b \in R$ के लिये,

$$a\alpha + b\beta = a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \ldots, aa_n + bb_n)$$

परन्तु $(aa_1 + bb_1)$ का वर्ग $(aa_2 + bb_2)$ होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ जब $a_2 = 4, a_1 = 2, b_2 = 9, b_1 = 3, a = 2, b = -2$, तो

$aa_2 + bb_2 = 8 - 18 = -10$ जबकि $(aa_1 + bb_1)^2 = (4-6)^2 = 4$

अतः $a\alpha + b\beta \notin W_3$, परिणामतः W_3, R^n का उपसमष्टि नहीं है।

(d) मान लो $W_4 = \{\alpha \mid \alpha \in R^n$ तथा $a_1 a_2 = 0\}$

पुनः माना $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W_4$ तथा $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W_4$

तब दिये गये प्रतिबन्ध से $a_1 a_2 = 0$ तथा $b_1 b_2 = 0$.

अब $a, b \in R$ के लिये,

$$a\alpha + b\beta = a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \ldots, aa_n + bb_n)$$

परन्तु $(aa_1 + bb_1)(aa_2 + bb_2)$ का शून्य होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ $a_1 = 0, a_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 0, a = 2, b = 3$ लेने पर,

$$(aa_1 + bb_1)(aa_2 + bb_2) = (0+3)(4+0) = 12 \neq 0$$

अतः $a\alpha + b\beta \in W_4$ परिणामतः W_4, R^n का उपसमष्टि नहीं है।

(e) मान लो $W_5 = \{\alpha \mid \alpha \in R^n, a_2$ परिमेय है$\}$

पुनः माना $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W_5$ तथा $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W_5$

तब दिये गये प्रतिबन्ध से a_2, b_2 परिमेय संख्यायें है।

अब $a, b \in R$ के लिये,

$$a\alpha + b\beta = a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \ldots, aa_n + bb_n)$$

परन्तु $aa_2 + bb_2$ का परिमेय संख्या होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ, यदि $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, a_2 = 3, b_2 = 4$ लें तो

$aa_2 + bb_2 = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ जो परिमेय नहीं है।

अतः $a\alpha + b\beta \notin W_5$ परिणामतः W_5, R^n की उपसमष्टि नहीं है।

Ex:- ~~Examine whe~~

Theorem:- The intersection of two subspace W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ is also a subspace of $V(F)$.

Proof:- $\because 0 \in W_1, 0 \in W_2$ (as every vector space contains zero vector)

$\Rightarrow 0 \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \phi$

let $\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \alpha, \beta \in W_1 ; \alpha, \beta \in W_2$

Since W_1 & W_2 are subspace of $V(F)$, then for any $a, b \in F$ we have

$a, b \in F$ & $\alpha, \beta \in W_1 \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W_1$ (Theorem 3)

$a, b \in F$ & $\alpha, \beta \in W_2 \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W_2$ (")

$\therefore a\alpha + b\beta \in W_1 \cap W_2$

So for $a, b \in F$ & $\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2$ is also a subspace of $V(F)$. H.P.

Generalisation:- The intersection of an arbitary family of subspace of a vector space is also a subspace.

Proof:- let $V(F)$ be a vector space & let $\{W_1, W_2, \ldots\}$ is a family of subspace of $V(F)$ then we prove that $\bigcap_i W_i$ is also a subspace of $V(F)$

$\because 0 \in W_i \ \forall i \Rightarrow 0 \in \bigcap_i W_i \Rightarrow \bigcap_i W_i \neq \phi$

let $\alpha, \beta \in \bigcap_i W_i \Rightarrow \alpha, \beta \in W_i \ \forall i$

Now $\forall i$; W_i is subspace of $V(F)$ so for $a, b \in F$

& $\alpha, \beta \in W_i \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W_i, \forall i$ (Theorem 3)

$\Rightarrow a\alpha + b\beta \in \bigcap_i W_i$

$\therefore a, b \in F$ & $\alpha, \beta \in \bigcap_i W_i \Rightarrow a\alpha + b\beta \in \bigcap W_i$

$\Rightarrow \bigcap_i W_i$ is subspace of $V(F)$