Eg :- for the vector space $F(F)$, Basis set is $S = \{1\} \Rightarrow \dim F(F) = 1$.

Eg :→ let $P[y]$ be a vector space of all the Polynomials in y.

$$S = \{1, y, y^2, \cdots, y^n, \cdots\}$$

$\Rightarrow \dim P[y] =$ infinity.

Hence it is infinite dimensional vector space.

Eg :→ If $V(R)$ be the vector space of ordered pairs of complex numbers. Show that $S = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ is a Basis of V.

$$\dim V = 4$$

Soln :→ (i) S is L.I :→

let $\exists\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$ s.t.

$$\Rightarrow a_1(1,0) + a_2(i,0) + a_3(0,1) + a_4(0,i) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (a_1 + ia_2,\ a_3 + ia_4) = (0+i0,\ 0+i0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + ia_2 = 0+i0 \\ a_3 + ia_4 = 0+i0 \end{array}\right] \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$$

$\Rightarrow$ S is L.I ——(i)

Now let $\alpha \in V$

$$\Rightarrow \alpha = (a+ib,\ c+id) \in V \text{ where } a, b, c, d \in R$$

$\Rightarrow \alpha = a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i)$

$\Rightarrow$ Every element of V can be expressed as a

L.C. of elements of S

$\Rightarrow V = L(S)$ ——(ii)

by (i) & (ii) $\Rightarrow$ S is basis of V

$\dim V$ = no. of elements in S

$= 4$ H.P.

Eg:- If the set $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ be basis for the vector space, then prove that $S_1 = \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1\}$ will also be basis for $V_3(R)$

Soln → Since S is basis of $V_3(R)$

$\Rightarrow$ (i) S is L.I. (ii) $V_3(R) = L(S)$

Now to prove that S_1 is basis of $V_3(R)$. First we prove that S_1 is L.I.

Let $\exists$ scalars $a, b, c \in R$ s.t.

$$a(\alpha_1+\alpha_2) + b(\alpha_2+\alpha_3) + c(\alpha_3+\alpha_1) = 0$$

$$\Rightarrow (a+c)\alpha_1 + (a+b)\alpha_2 + (b+c)\alpha_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $a+c=0$, $a+b=0$, $b+c=0$ { as S is L.I. set, so. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \Rightarrow a_1=0, a_2=0, a_3=0$ }

$\Rightarrow a=0, b=0, c=0 \Rightarrow S_1$ is L.I.

Now $\dim V_3(R) = 3$ & by theorem, the set of any three L.I. vectors of $V_3(R)$ will form a basis.

$\Rightarrow S_1$ is basis of $V_3(R)$ [as S_1 is the set of 3 L.I. vectors of $V_3(R)$]

Prove that the set $\{(2,1,0), (1,-1,2), (1,2,1)\}$ forms a Basis of the vector space $V_3(R)$

हल:- माना $S = \{(2,1,0), (1,-1,2), (1,2,1)\}$

$\Rightarrow S \subset V_3(R)$

(i) S को एकघातत: स्वतंत्र (L.I) सिद्ध करने के लिये माना अदिश $a_1, a_2, a_3 \in R$ इस प्रकार विद्यमान हैं कि

$a_1(2,1,0) + a_2(1,-1,2) + a_3(1,2,1) = 0$

जहाँ 0, $V_3(R)$ का शून्य सदिश है।

$\Rightarrow (2a_1 + a_2 + a_3, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_2 + a_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow 2a_1 + a_2 + a_3 = 0$ —(i)

$a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$ —(ii)

$+2a_2 + a_3 = 0$ —(iii)

(i) तथा (ii) से $3a_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow a_1 + a_3 = 0$ (iv)

(i) तथा (iii) से $4a_1 + a_3 \Rightarrow 4a_1 + a_3 = 0$ (v)

(iv) तथा (v) से $\Rightarrow 3a_1 = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

$\Rightarrow$ S के अवयव एकघातत: स्वतंत्र हैं।

अब V को S की एकघात विस्तृति सिद्ध करते हैं।

माना कि $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in V_3(R)$

तब $a, b, c \in R$ इस प्रकार हैं कि

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = a(2,1,0) + b(1,-1,2) + c(1,2,1)$ — (vi)

$\Rightarrow$ $2a+b+c = \alpha_1$, $a-b+2c = \alpha_2$,

$2b+c = \alpha_3$

$\Rightarrow$ $a = \frac{1}{9}[5\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3]$ —(vii)

$b = \frac{1}{9}[\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_3]$ —(viii)

$c = \frac{1}{9}[-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3)$ —(ix)

(vii), (viii) तथा (ix) से मान (vi) में रखने पर V_3 के प्रत्येक अवयव को S के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$\Rightarrow$ S, $V_3(R)$ का आधार है।

उदाहरण 6 :→ सिद्ध कीजिये कि सदिश समष्टि $C(R)$ का आधार समुच्चय $S = \{a_1+ib_1, a_2+ib_2\}$ होगा यदि और केवल यदि

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Prove that the set $S = \{a_1+ib_1, a_2+ib_2\}$ is basis of vector space $C(R)$ if $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

[Raj. 08, Jodhpur 15; Ajmer 15; Udaipur 8]

हल :→ प्रथमत: S को एकघातत: स्वतन्त्र सिद्ध करते हैं.

माना कि अदिश $a, b \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$a(a_1+ib_1) + b(a_2+ib_2) = 0 \quad \text{---(i)}$$

$$\Rightarrow aa_1+ba_2 + i(ab_1+bb_2) = 0+i0$$

$$\Rightarrow aa_1+ba_2 = 0$$

$$ab_1+bb_2 = 0$$

$\Rightarrow b(b_1a_2 - a_2b_2) = 0$

$\Rightarrow b = 0$ यदि $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$ या $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$

यदि $b = 0$ तो (i) से $a = 0$

$\Rightarrow$ S रैखिकतः स्वतंत्र है।

$\Rightarrow$ S रैखिकतः स्वतंत्र है यदि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ — (ii)

अब सिद्ध करेंगे कि $C(R) = L(S)$

माना कि $\alpha + i\beta \in C(R)$

तब अदिश $a, b \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$\alpha + i\beta = a(a_1 + ib_1) + b(a_2 + ib_2)$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = (aa_1 + ba_2) + i(ab_1 + bb_2)$

$\Rightarrow \alpha = aa_1 + ba_2, \beta = ab_1 + bb_2$

$\Rightarrow a = \frac{\alpha b_2 - \beta a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, b = \frac{\alpha b_1 - \beta a_1}{-a_1b_2 + a_2b_1}$

यदि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$\Rightarrow C(R)$ का प्रत्येक अवयव S के अवयवों के रैखिक संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं यदि

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$\Rightarrow C(R) = L(S)$ यदि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ — (iii)

(ii) तथा (iii) से $\Rightarrow$ S, $C(R)$ का आधार होगा यदि और केवल यदि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$