(विस्तार प्रमेय) समान है)

(Extension theorem) :→

प्रमेय :→ 15. किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का प्रत्येक रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय या तो V का आधार होता है या इसकी विस्तृति कर V का आधार बनाया जा सकता है।

Every linearly independent (LI) subset of a finitely generated vector space V(F) is either a basis of V or can be extended to form a basis of V. [RU 01, 02, 14; MLSU 01, 03S, 13; MDSU 02, 04; JNVU 03]

उपपत्ति :→ माना कि $\dim V = n$ तथा $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m\}$, V का आधार है। तथा $T = \{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n\}$ V का रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय है।

∵ S, V का आधार है।

⇒ V = L(S) तथा S रैखिकतः स्वतंत्र है।

माना कि $B = T \cup S = \{\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$

∵ S, V का आधार है अतः प्रत्येक β_j को S के अवयवों $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ के रैखिक संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। (∵ V = L(S))

(*) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}$ एकघाततः स्वतन्त्र

$\Rightarrow$ β_k एकघाततः परतन्त्र है। तथा, है।
अतः B के किसी अवयव को इसके पूर्ववर्ती ~~B के शेष बचे हुए~~ अवयवों के एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

माना कि

$B_1 = B - \{\alpha_k\}$

$= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots \beta_n\}$

$= \{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_m\}$

अतः $V = L(B_1)$

$\Rightarrow$ यदि B_1 एकघाततः स्वतंत्र हैं तो B_1, V का आधार होगा (यही विस्तृत आधार है)

यदि B_1 एकघाततः परतंत्र हो तो उपरोक्त प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करते रहने से ~~एक~~ एकघाततः स्वतंत्र समुच्चय, प्राप्त होगा जिसमें $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-n}\}$ के अवयव ~~अन्तर्विष्ट~~ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-n}$ अन्तर्विष्ट होंगे तथा वह सदिश समष्टि V को जनित करेगा। अतः वह समुच्चय V का आधार होगा।

यदि $m = n \Rightarrow S$, V का आधार होगा।
परन्तु यदि $n < m$ तो इसमें $m-n$ सदिश, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m\}$ B के सम्मिलित करके इसे आधार के लिये विस्तृत कर सकते है।

Midas
PAGE NO. :
DATE : / /

~~यह~~ इस प्रमेय को इस प्रकार भी व्यक्त किया जाता है।

• ~~माना कि~~ यदि V(F) एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तो इसका प्रत्येक एकघातत: उपसमुच्चय V के आधार का अंश होता है।

If V(F) be a finite dimensional vector space then every linearly independent subset of V is a part of its basis.

प्रमेय:- 16. यदि S, n विमीय सदिश समष्टि V(F) के n एकघातत: स्वतंत्र सदिशों का समुच्चय है तो S, V का एक आधार होगा।

or

यदि V(F) n विमीय सदिश समष्टि है तो इसके n एकघातत: स्वतंत्र सदिशों का कोई भी समुच्चय V का एक आधार होता है।

If V(F) is a n-dimensional vector space, then any set of n linearly independent vectors of it is a basis of V.

(MDSU05, JNVU02)

उपपत्ति:- ∵ V(F) n विमीय सदिश समष्टि है तथा माना कि

$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n\}$, V का कोई एकघातत: स्वतंत्र समुच्चय है।

$\dim S = n$

यदि S सदिश समष्टि, V का

जनित करता है।

⇒ S, V(F) का आधार है। तो प्रमेय सिद्ध हो जाती है।

परन्तु यदि S, V(F) का आधार नहीं है। तो प्रमेय 15 से S को इस प्रकार विस्तृत किया जा सकता है कि V का आधार बन सके।

⇒ इस स्थिति में V के आधार में n से अधिक सदिश होंगे जो कि दी गई अवधारणा V के विपरीत है।

$\dim V = n$

अतः अभिधारणा (S, V का आधार नहीं है) गलत है।

⇒ S सदिश समष्टि V(F) का आधार अवश्य होगा।

प्रमेय 6-17 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F), यदि $\dim V(F) = n$, तब V के n सदिशों का ऐसा समुच्चय जो कि V को जनित करता है, तो वह V का आधार होगा।

If V(F) is a finite dimensional vector space with $\dim V = n$, then a subset of n vectors of V that spans V, this is a basis of V.

[RU 1998]