प्रमेय :-19 यदि $V(F)$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा W, V की उपसमष्टि है, तो

If $V(F)$ is a finite dimensional vector space and W be a subspace of V, then;

(a) $\dim W \leq \dim V$

(b) $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$

[RU 04; MLSU 08; MDSU 04; Kota 05; Bikaner 07, 15]

उपपत्ति :→ (a) माना कि $V(F)$ एक ~~परिमित~~ परिमित n विमीय सदिश समष्टि है ~~तथा $\dim V = n$~~ तथा W, सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि है।

$\because \dim V(F) = n$

$\Rightarrow$ V का प्रत्येक $n+1$ या इससे अधिक सदिशों का समुच्चय एकघाततः परतंत्र होगा (प्रमेय 18 से)

$\Rightarrow$ W में $n+1$ या इससे अधिक सदिश होंगे तो वह एकघाततः परतंत्र होगे।

$\Rightarrow$ W में अधिकतम n सदिश ही एकघाततः स्वतंत्र होंगे।

अतः माना कि

$S = \{B_1, B_2, \ldots\ldots B_r\}$ सबसे बड़ा एकघाततः स्वतंत्र (या) समुच्चय है।

जहाँ $r \leq n$

Midas
PAGE NO. :
DATE : / /

माना कि $B \in W$

समुच्चय $T = \{B, B_1, B_2, \ldots, B_k\}$

⇒ एकधातत: परंतत्र होगा। ($\because$ T सबसे बड़ा LI समुच्चय है।

⇒ सदिश $B \in W$ को उसके शेष बचे हुऐ अवयवों $B_1, B_2, \ldots B_k$ के एकधात संचय के रूप में लिख सकते हैं। (प्रमेय 10 से)

⇒ $L(T) = W$

⇒ T उपसमष्टि W का आधार है।
($\because$ T LI है)

⇒ $\dim W = k$ जहाँ $k \leq n$

⇒ $\dim W \leq \dim V$

(b)(⇐) माना कि $W = V$

⇒ W, V की उपसमष्टि है तथा V, W की उपसमष्टि है।

⇒ $\dim W \leq \dim V$ तथा
$\dim V \leq \dim W$ (प्रमेय 19(a) से)

⇒ $\dim W = \dim V$

(⇐) विलोमत: माना कि $\dim W = \dim V = n$

यदि $B = \{B_1, B_2, \ldots B_n\}$ समष्टि W का आधार है तो

$W = L(B)$ —— (1)

$\because$ B सदिश समष्टि V के भीम एकधाततः स्वतंत्र सदिशों का समुच्चय है।

⇒ $V = L(B)$ —— (2)

(1) एवं (2) से $W = V$

अतः $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$

प्रमेय 20 यदि $V(F)$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है, तथा K एवं T, V की दो उपसमष्टियाँ हो, तो यदि $V(F)$ is a finite dimensional vector space and K and T are two subspace of V, then

$\dim K + \dim T = \dim (K+T) + \dim (K \cap T)$

[RU, 2000, 01; MLSU 03; MDSU 99, 02; JNVU 01, 03)

उपपत्ति :→ माना कि $\dim (K \cap T) = r$ — (1)

तथा समुच्चय

$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$, $K \cap T$ का आधार है।

$\Rightarrow$ $B \subset K$, $B \subset T$

$\because B \subset K$ तथा B एकघाततः स्वतंत्र है। तो प्रमेय 15 (विस्तार प्रमेय) से B का विस्तार करके K का आधार प्राप्त किया जा सकता है।

माना कि

$B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ K का आधार है।

$\Rightarrow \dim K = r + m$ — (2)

इसी प्रकार माना कि

$B_2 = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n\}$ T का आधार है।

$\Rightarrow \dim V_2 = r + k \quad -(3)$

अतः

$\dim K + \dim T - \dim (K \cap T)$

$= (r+m) + (r+k) - r$

(1), (2) एवं (3) से)

$= r + m + k \quad -(4)$

समुच्चय

$B_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k\}$

जिसमें $r+m+k$ सदिश हैं। यदि B_3 समुच्चय $K+T$ का आधार होगा तो प्रमेय (4) की सहायता से स्वतः ही सिद्ध हो जायेगी अतः

(i) B_3 को एकघातः स्वतंत्र तथा

(ii) $K+T = L(B_3)$ सिद्ध करेंगे

(i) B_3 एकघातः स्वतंत्र समुच्चय है:-

यदि अदिश $a_1, a_2, \cdots a_r, b_1, b_2 \cdots b_m, c_1, c_2, \cdots c_k \in F$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_m\beta_m + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_k\gamma_k = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j + \sum_{l=1}^{k} c_l\gamma_l = 0$

$\Rightarrow \sum_{l=1}^{k} c_l\gamma_l = -\sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i - \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j \quad -(5)$

$\because -\sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i - \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j \in$

(6) एवं (8) से $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i \in K$

तथा $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i \in T$ ($\because$ T के आधार के अवयवों का एकघातत: स्वतंत्र है) — (8)

(5) एवं (6) से

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \in K \cap T$

अत: इसे B के अवयवों के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i x_i = \sum_{i=1}^{s} d_i \alpha_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i x_i - \sum_{i=1}^{s} d_i \alpha_i = 0$

$\Rightarrow c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k - d_1 \alpha_1 \cdots - d_s \alpha_s = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0, \cdots c_k = 0, d_1 = 0, \cdots d_s = 0$ — (9)

($\because B_2$, एकघातत: स्वतंत्र है)

(9) से मान (5) में रखने पर

$a_1 \alpha_1 + \cdots a_s \alpha_s + b_1 \beta_1 + \cdots + b_m \beta_m = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0, \cdots a_s = 0, b_1 = 0, \cdots b_m = 0$

($\because B_1$ एकघातत: स्वतंत्र है)

अत: (5) से

$\Rightarrow a_1 = 0, \cdots a_s = 0, b_1 = 0, \cdots b_m = 0, c_1 = 0, \cdots c_k = 0$

$\Rightarrow B_3$ एकघातत: स्वतंत्र है।

(ii) $K + T = L(B_3)$

$\because K + T$, $V(F)$ की उपसमष्टि है और B_3 का प्रत्येक अवयव $K+T$ में विद्यमान है अत:

$L(B_3) \subseteq K + T$ — (10)

माना कि $u \in K+T$

$\Rightarrow u = k_1 + t_1$ अर्थात् K का कोई अवयव + T का कोई अवयव

$\Rightarrow u =$ K के आधार B_1 के अवयवों का रैखिक संचय + T के आधार B_2 के अवयवों का रैखिक संचय

$\Rightarrow u =$ B_3 के अवयवों का रैखिक संचय

$\Rightarrow u \in L(B_3)$

अतः $K+T \subset L(B_3)$ —(11)

(10) एवं (11) से

$K+T = L(B_3)$

$\Rightarrow B_3$, $K+T$ का आधार है।

$\Rightarrow \dim(K+T) = r+m+k$ —(12)

(4) एवं (12) से

$\dim K + \dim T - \dim(K \cap T)$

$= \dim(K+T)$

$\Rightarrow \dim K + \dim T = \dim(K \cap T) + \dim(K+T)$